6
1963

FABER-CASTELL

Rechenstab-Brief

Berichte und Anregungen für das Stabrechnen

Aus dem Inhalt

Verantwortliche Schriftleitung:

Dr. Peter Pirchan
Ing. Harald Bachmann

Hinweis:

Der Castell-Rechenstab-Brief wird kostenlos an Interessenten verschickt. Weitere Druckschriften können angefordert werden.

Der Rechenstab in der Volksschule

von Werner Lehmann, Hannover

Die Richtlinien für die Volksschulen des Landes Niedersachsen, herausgegeben vom Niedersächsischen Kultusministerium 1962, sehen im Abschnitt III — Rechnen und Raumlehre — in der 3. Bildungsstufe für das 9. Schuljahr im 2. Absatz vor: Arbeiten mit Tafeln (Zinseszinstafel, Quadratzahltafel), Rechenstab.

Es soll nun im Folgenden untersucht werden, was gegen eine Einführung des Rechenstabes in der Volksschule geltend gemacht werden kann und was für die Arbeit mit dem Rechenstab spricht.

1. Im Vordergrund der Gegenargumente steht, daß dem Rechenstab die Lehre von den Logarithmen zugrunde liegt, die den Volksschülern nicht zugänglich ist.

Seit 6 Jahren arbeiten wir im Rechen- und Raumlehreunterricht des 9. Schuljahres an unserer Schule mit dem Rechenstab und haben es noch nicht ein einziges Mal als Mangel empfunden, daß uns die Arbeitsweise des Stabes von seinem logarithmischen Aufbau her verschlossen blieb.

Wieviel Rechenhilfsmittel, von der einfachsten bis zur kompliziertesten Rechenmaschine, werden heute im Berufsleben eingesetzt und von Menschen bedient, die die zugrunde liegenden mathematischen oder physikalischen Voraussetzungen ebenfalls nicht kennen?

2. Warum sollen wir den Rechenstab nicht den Berufsschulen überlassen?

Die Antwort auf diese Frage ist relativ einfach. Die Arbeit mit dem Rechenstab wird nur dann von einem bleibenden Wert sein, wenn man mit ihm verwächst. Dazu ist es nötig, daß man ihn, zumindest in der Periode des Einübens der Rechenvorgänge, täglich in die Hand nimmt und damit arbeitet. Nur dann „wächst er dem Lernenden in die Hand" und wird zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel.

Wir haben im 9. Schuljahr mindestens viermal in der Woche nach der Stundentafel der Richtlinien die Gelegenheit dazu. Alle Überschlagsrechnungen, Statistiken, Tabellen usw. im Kernunterricht können ebenfalls mit dem Rechenstab erstellt werden. Die Berufsschule ist mit ihrem einen Unterrichtstag wöchentlich, der ja nicht nur das Fachrechnen berücksichtigen muß, rein zeitlich gar nicht in der Lage dazu, dem Durchschnittsschüler ein echtes Vertrautwerden mit dem Rechenstab zu ermöglichen.

Wir haben aus diesem Grunde auch für unsere Schüler einen Rechenstab ausgewählt, der klar im Aufbau und leicht überschaubar in seiner Arbeitsweise ist, der aber auch in der Berufsschule und danach voll verwendungsfähig bleibt. Deshalb arbeiten wir schon seit Jahren mit dem Rechenstab Faber-Castell 57/87.

3. Ein weiteres, sehr ernst zu nehmendes Argument ist, daß wir durch die Einführung des Stabrechnens das bereits bestehende Mißverhältnis zwischen der Fülle des Stoffes und der Zahl der zur Verfügung stehenden Stunden noch vergrößern. Dieses Argument würde m. E. dann stichhaltig sein, wenn der Rechenstab als ein neues, zusätzliches Stoffgebiet den zu bewältigenden Aufgaben hinzugefügt würde und ein mehr oder weniger selbständiges und vorübergehendes Eigenleben führen würde.

Wenn man nach einer kurzen, aber gründlichen Einführung der Arbeitsweise mit dem Rechenstab zu Beginn des 9. Schuljahres ihn laufend nutzt, um der Forderung der „Richtlinien für die Volksschulen des Landes Niedersachsen" nachzukommen, „planmäßige Übungen zur Einsicht in die einzelnen Rechenverfahren und zu ihrer Sicherung" durchzuführen, dann ist der Rechenstab keine zusätzliche Belastung, sondern ein Gewinn. Die notwendige Übung der einzelnen Rechenverfahren zur Erweiterung, Vertiefung und Sicherung bekommt ein ganz neues Gesicht, wenn wir nicht nur in früheren Jahren erlernten Stoff wiederholen, sondern die Beschäftigung mit dem Wiederholungsstoff scheinbar zweitrangig dazu dient, uns Übungsstoff für das Stabrechnen zu bieten und uns die vielfältige Verwendungsmöglichkeit dieses Gerätes zu veranschaulichen.

Zur Ermittlung der Ergebnisse kommt beim Überschlag auch das Kopfrechnen wieder mehr zu seinem Recht.

Damit das schriftliche Rechnen nicht zu stark in den Hintergrund gedrängt wird, kontrollieren wir immer wieder unsere Rechenstabergebnisse und deren Genauigkeit durch schriftliches Rechnen und ermitteln die prozentuale Abweichung des Annäherungswertes des Rechenstabergebnisses.

Ich möchte, um den Punkt 3 abzuschließen, bemerken, daß es ohne den Rechenstab und seine vielfältigen Möglichkeiten m. E. recht schwierig ist, in den nach den Richtlinien für das 9. Schuljahr festgelegten 4 Stunden wöchentlich für Rechnen und Raumlehre zu den geforderten Einsichten in die einzelnen Rechenverfahren, ihrer planmäßigen Übung und Sicherung zu kommen. Mit dem Rechenstab ist diese Aufgabe wesentlich erleichtert. Falls Aufgaben aus den verschiedenen Gebieten im schriftlichen Verfahren gelöst werden, dient der Rechenstab immer zur Ergebniskontrolle.

Wenn man zum Schluß das Für und Wider noch einmal zusammenfassend gegeneinander abwägt, dann fällt die Entscheidung eindeutig für den Rechenstab. Da die Richtlinien für Niedersachsen ihn fordern, könnte man meinen, daß diese Frage außerhalb der Diskussion steht. Entscheidend ist aber nicht allein das Gebot, das durch die endgültige Fassung der Richtlinien für die Volksschulen des Landes Niedersachsen aufgestellt wurde, sondern der Geist, mit dem dieses von der Lehrerschaft mit Inhalt gefüllt wird.

In gleicher Weise hängt es von der Freudigkeit des Unterrichtenden ab, ob der Rechenstab für unsere Kinder zu einem bleibenden Gewinn für den Rest ihrer Schulzeit wird und vor allem für die berufliche Weiterbildung und für das spätere Leben einen wertvollen Beitrag leistet.

Trigonometrische Dreiecksauflösung mit dem FABER-CASTELL-Schul-D-Stab Nr. 52/82

von Professor Wilhelm Körperth, Wien

I

Im „Rechenstab-Brief" Nr. 1/1961 (Seite 4-8) wurde eingehend über die neuen Winkelfunktionsskalen auf den FABER-CASTELL-Schul-Rechenstäben berichtet und ihr Vorteil an einigen Beispielen der Dreiecksauflösung gezeigt.

Im „Rechenstab-Brief" Nr. 2/1961 (Seite 9) wird eine Umformung des Kosinussatzes besprochen, die sich für das Stabrechnen eignet. Im folgenden werden weitere Methoden der Dreiecksauflösung mit dem Rechenstab angegeben. Es werden wie bei der Dreiecksauflösung mittels der Logarithmen der Sinussatz, Tangenssatz und Halbwinkelsatz verwendet. Für das Rechnen mit dem Rechenstab wird als **einheitliche Methode die „Goldene Regel des Stabrechnens"** verwendet (siehe Handbuch der Schulmathematik, Band 1, Seite 126).

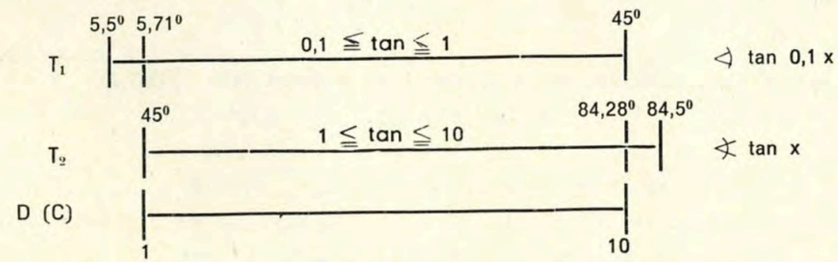
Die Verwendung des Rechenstabes bei der Dreiecksauflösung mit dem Sinussatz wurde schon oft in der Literatur dargestellt; sie wird nur der Vollständigkeit wegen wiederholt. Der Tangenssatz und der Halbwinkelsatz wurden dagegen, wie mir scheint, bei der Dreiecksauflösung mit dem Rechenstab noch nie verwendet. Der Grund liegt wohl darin, daß erst in dem angeführten FABER-CASTELL-Schul-D-Stab und im Schul-Stab Log-Log Nr. 57/89, sowie im FABER-CASTELL-Duplex 2/82, Rechenstäbe vorliegen, die drei Tangensskalen (T_1, T_2, ST) enthalten. Bei diesen Rechenstäben sind die drei Tangensskalen und die Sinusskala S auf dem Stabkörper angebracht. Erst das Vorhandensein der zwei Tangensskalen T_1, T_2 und der ST-Skala macht eine praktische Rechnung mit dem Rechenstab bei Verwendung des Tangenssatzes möglich.

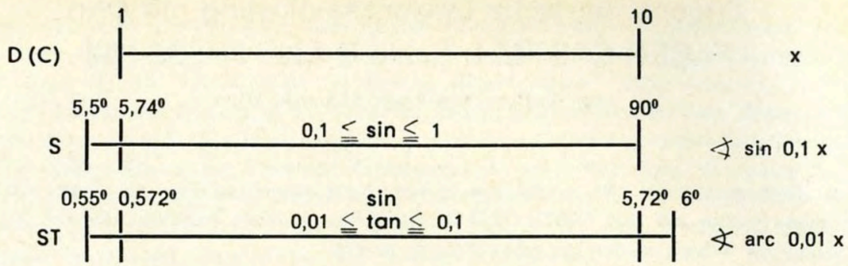
Die folgenden Beispiele behandeln alle Auflösungsfälle und sind so gewählt, daß alle Fälle vorkommen, die bei der Benützung des Rechenstabes auftreten können.

II

Bevor mit der Dreiecksauflösung begonnen wird, soll eine Übersicht über die auf dem FABER-CASTELL-Schul-D-Stab 52/82 vorkommenden Winkelfunktionsskalen mit Angabe des Stellenwertes gegeben werden.

Der **Stellenwert** wird bei jeder Rechnung **stets durch eine Überschlagsrechnung ermittelt.**





III

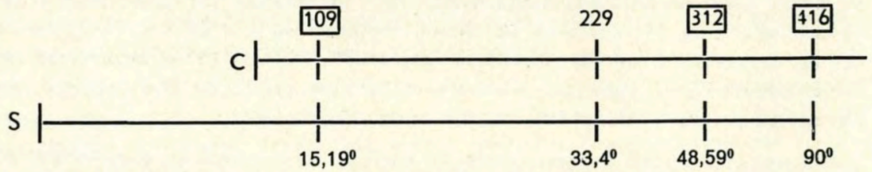
Gegeben: Eine Seite und zwei Winkel (SWW)

$$a = 229, \quad \alpha = 33{,}4^0, \quad \beta = 15{,}19^0$$

Für die Verwendung der angeführten Rechenstäbe wird der Sinussatz in folgender Form verwendet:

$$\frac{229}{\sin 33{,}4^0} = \frac{b}{\sin 15{,}19^0} = \frac{c}{\sin 48{,}59^0} = \frac{2r}{\sin 90^0}$$

Die Durchführung der Rechnung ist aus der folgenden Abbildung ersichtlich. Begonnen wird die Rechnung, indem man C 229 über S 33,4° einstellt.



Ergebnis: $\gamma = 131{,}41^0$, $b = 109$, $c = 312$, $r = 208$

Bemerkungen:

1) Bei allen Dreiecksauflösungen (mit Ausnahme des Falles SSS) wird **stets mit einer Winkeleinstellung begonnen.**

2) Ein Durchschieben der Zunge wird in manchen Fällen notwendig sein. Bei Verwendung der versetzten Skalen CF, DF läßt sich diese fast immer vermeiden, wie die folgenden Beispiele zeigen.

IV

Gegeben: Zwei Seiten und der Gegenwinkel der größeren Seite (SSW_g)

$$a = 435, \quad c = 148, \quad \alpha = 14{,}13^0$$

$$\frac{435}{\sin 14{,}13^0} = \frac{148}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{2r}{\sin 90^0}$$

CF 435 / S 14,13° // CF 148 / ST 4,76° // S 18,89° / CF 577 // S 90° / CF 1780

Ergebnis: $\gamma = 4{,}76^0$, $\beta = 161{,}11^0$, $b = 5{,}77$, $r = 890$

V

Gegeben: Zwei Seiten und der Gegenwinkel der kleineren Seite (SSW_k)

$$a = 108, \quad b = 45, \quad \beta = 11{,}42^0$$

$$\frac{108}{\sin \alpha} = \frac{45}{\sin 11{,}42^0} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{2r}{\sin 90^0}$$

CF 45 / S 11,42° // CF 108 / S 28,4° // S 39,82° / CF 145,5 // S 16,98° / CF 66,3 // S 90 / CF 227

Ergebnis: $\alpha_1 = 28{,}4^0$, $\gamma_1 = 140{,}18^0$, $c_1 = 145{,}5$

$\alpha_2 = 151{,}6^0$, $\gamma_2 = 16{,}98^0$, $c_2 = 66{,}3$, $r = 113{,}5$

VI

Gegeben: Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (SWS)

1. Beispiel: $a = 122, \quad b = 62, \quad \gamma = 162{,}1^0$

Zur Berechnung der übrigen Winkel des Dreiecks wird der Tangenssatz verwendet und in folgender Form angeschrieben:

$$\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{a+b} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{a-b}\,; \quad \frac{\tan 8{,}95^0}{184} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{60}$$

Man stellt mit Hilfe des Läufers unter T_1 8,95° den Wert C 184 ein.

Auf der Skala D liest man den ungefähren Wert 0,15 für tan 8,95° ab und macht die Überschlagsrechnung

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} \approx \frac{0{,}15}{3} = 0{,}05.$$

Es muß daher der Wert von $\frac{\alpha-\beta}{2}$ auf der Skala ST abgelesen werden:

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 2{,}94^0 \qquad T_1\ 8{,}95^0 \;/\; C\ 184$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 8{,}95^0 \qquad C\ 60 \;/\; ST\ 2{,}94^0$$

$$\underline{\underline{\alpha = 11{,}89^0}}$$

$$\underline{\underline{\beta = 6{,}01^0}}$$

Um die fehlende Seite zu berechnen, verwendet man die Mollweidesche Gleichung

$$\frac{a-b}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{c}{\cos\frac{\gamma}{2}}\,; \quad \frac{60}{\sin 2{,}94^0} = \frac{c}{\sin 8{,}95^0} \qquad \underline{\underline{c = 182}}$$

Stellenwertbestimmung durch die Überschlagsrechnung

$$c \approx \frac{60 \cdot 0{,}15}{0{,}05} = 180$$

Eine Änderung der Zungeneinstellung ist in diesem Fall nicht notwendig, da sin 2,94° $\approx$ tan 2,94° ist. Man verschiebt nur den Läufer auf S 8,95° und liest auf der Skala C den Wert für c ab.

Es ist also bei diesem Beispiel für die vollständige Auflösung des Dreiecks nur eine einzige Zungeneinstellung notwendig.

2. B e i s p i e l : $a = 197, \quad b = 53, \quad \gamma = 139{,}93^0$

$$\frac{\tan 20{,}03^0}{250} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{144}$$

Eine Überschlagsrechnung ergibt, daß man $\frac{\alpha-\beta}{2}$ auf der Skala T_1 ablesen muß:

$\frac{\alpha-\beta}{2} = 11{,}87^0$	T_1 20,03° / C 250
$\frac{\alpha+\beta}{2} = 20{,}03^0$	C 144 / T_1 11,87°
$\alpha = 31{,}9^0$	
$\beta = 8{,}16^0$	

Zur Berechnung der fehlenden Seite muß man eine zweite Einstellung vornehmen:

$$\frac{144}{\sin 11{,}87^0} = \frac{c}{\sin 20{,}03^0}; \quad c = 240$$

S 11,87° / C 144 // S 20,03° / C 240

3. B e i s p i e l : $a = 205, \quad b = 200, \quad \gamma = 24{,}18^0$

$$\frac{\tan 77{,}91^0}{405} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{5}$$

Man stellt unter T_2 77,91° den Wert C 405 ein. Die Überschlagsrechnung

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} \approx \frac{4{,}7}{80} = 0{,}06$$

zeigt, daß man $\frac{\alpha-\beta}{2}$ auf der Skala ST ablesen muß:

$\frac{\alpha-\beta}{2} = 3{,}3^0$	Die Seite c berechnet sich nach der Gleichung:
$\frac{\alpha+\beta}{2} = 77{,}91^0$	$\frac{5}{\sin 3{,}3^0} = \frac{c}{\sin 77{,}91^0} \qquad c = 85$
$\alpha = 81{,}21^0$	
$\beta = 74{,}61^0$	

Da die Skala ST verwendet wurde, benötigt man für die vollständige Dreiecksauflösung nur eine einzige Einstellung:

T_2 77,91° / C 405 // C 5 / ST 3,3° // S 77,91° / C 85

4. B e i s p i e l : $a = 156, \quad b = 119, \quad \gamma = 61{,}93^0$

$$\frac{\tan 59{,}03^0}{275} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{37}$$

Man stellt unter T_2 59,03° den Wert C 275 ein. Die Überschlagsrechnung

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} \approx \frac{1{,}7}{7} = 0{,}24$$

zeigt, daß man $\frac{\alpha-\beta}{2}$ auf der Skala T_1 ablesen muß:

$\frac{\alpha-\beta}{2} = 12{,}63^0$	T_2 59,03° / C 275
$\frac{\alpha+\beta}{2} = 59{,}03^0$	C 37 / T_1 12,63°
$\alpha = 71{,}66^0$	
$\beta = 46{,}4^0$	

Für die Berechnung der Seite c ist eine zweite Einstellung nötig:

$\frac{37}{\sin 12{,}63^0} = \frac{c}{\sin 59{,}03^0}$	S 12,63 / CF 37
$c = 145$	S 59,03° / CF 145

5. B e i s p i e l : $a = 309{,}6, \quad b = 110{,}2, \quad \gamma = 34{,}6^0$

$$\frac{\tan 72{,}7^0}{419{,}8} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{199{,}4}$$

Man stellt unter T_2 72,7° den Wert C 419,8 ein. Die Überschlagsrechnung

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} \approx \frac{3{,}2}{2} = 1{,}6$$

zeigt, daß man $\frac{\alpha-\beta}{2}$ auf der Skala T_2 ablesen muß:

$\frac{\alpha-\beta}{2} = 56{,}75^0$	T_2 72,7° / C 419,8
$\frac{\alpha+\beta}{2} = 72{,}7^0$	C 199,4 / T_2 56,75°
$\alpha = 129{,}45^0$	
$\beta = 15{,}95^0$	

Für die Berechnung der Seite c ist eine zweite Einstellung nötig:

$\frac{199{,}4}{\sin 56{,}75^0} = \frac{c}{\sin 72{,}7^0}$	S 56,75° / C 199,4
$c = 227{,}6$	S 72,7° / C 227,6

Zusammenfassung:

1) $\gamma > 90^0$

In diesem Fall ist $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2} < 45^0$. Wegen $\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} - \beta$,

ist auch $\frac{\alpha-\beta}{2} < 45^0$.

Man kommt daher mit der Tangensskala T_1 aus, wenn $5{,}5^0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < 45^0$ ist. (Beisp. 2).

Man benötigt die Skala ST, wenn $0{,}55^0 < \frac{\alpha-\beta}{2} < 5{,}5^0$ ist (Beispiel 1).

2) $\gamma < 90^0$

Da in diesem Fall $\frac{\alpha+\beta}{2} > 45^0$ ist, braucht man schon zur Einstellung von $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$ die Tangensskala T_2. Für $\frac{\alpha-\beta}{2}$ sind drei Fälle möglich:

$0{,}55^0 < \frac{\alpha-\beta}{2} < 5{,}5^0$	Skala ST	(Beispiel 3)
$5{,}5^0 < \frac{\alpha-\beta}{2} < 45^0$	Skala T_1	(Beispiel 4)
$45^0 < \frac{\alpha-\beta}{2} < 84{,}5^0$	Skala T_2	(Beispiel 5)

Bemerkungen:

1) Für den Fall $\gamma = 90^0$ (rechtwinkliges Dreieck) siehe VIII.

2) Die Dreiecksauflösung mit dem Rechenstab 52/82 nach der geschilderten Methode ist nur möglich, wenn die in den Rechnungen auftretenden Winkel in den Bereich $0{,}55^0 \ldots 84{,}5^0$ fallen (siehe auch II).

VII

Gegeben: Die drei Seiten (SSS)

$$a = 145, \quad b = 25, \quad c = 150$$

Man berechnet zuerst den Inkreisradius ϱ:

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{s}} \qquad \text{A } 150 \text{ / B } 160$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{15 \cdot 135 \cdot 10}{160}} \qquad \text{B } 135 \text{ / D } 11{,}25$$

$\varrho = 11{,}25$

Für die Berechnung der Winkel verwendet man den Halbwinkelsatz:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a} = \frac{11{,}25}{15} \approx 0{,}7 \qquad T_1 \qquad \frac{\alpha}{2} = 36{,}86^0$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b} = \frac{11{,}25}{135} \approx 0{,}08 \qquad ST \qquad \frac{\beta}{2} = 4{,}77^0$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c} = \frac{11{,}25}{10} = 1{,}125 \qquad T_2 \qquad \frac{\gamma}{2} = 48{,}37^0$$

$\alpha = 73{,}72^0$	CI 10 / D 11,25
$\beta = 9{,}54^0$	CI 15 / T_1 36,86° CI 135 / ST 4,77°
$\gamma = 96{,}74^0$	CI 10 / T_2 48,37°

Man stellt über D 11,25 mittels des Läufers den Wert CI 10 ein. Über CI 15 liest man auf T_1 den Winkel $\frac{\alpha}{2} = 36{,}86^0$ ab. Unter CI 135 steht auf der Skala ST der Winkel $\frac{\beta}{2} = 4{,}77^0$ und über CI 10 findet man auf der Skala T_2 den Winkel $\frac{\gamma}{2} = 48{,}37^0$.

VIII

Die angegebenen Methoden eignen sich auch sehr gut für die Auflösung von **rechtwinkligen Dreiecken.**

Von den möglichen Auflösungsfällen soll nur der Fall besprochen werden, daß die beiden Katheten gegeben sind.

Gegeben: Die beiden Katheten.

$$a = 37{,}7, \quad b = 33{,}6$$

Verwendet wird ebenfalls der Tangenssatz ($\gamma = 90^0$):

$$\frac{\tan 45^0}{71{,}3} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{4{,}1}$$

Die Überschlagsrechnung $\tan\frac{\alpha-\beta}{2} \approx \frac{4}{70} = 0{,}06$ zeigt, daß die Skala ST verwendet werden muß:

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 3{,}29^0$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 45^0$$

$$\alpha = 48{,}29^0$$

$$\beta = 41{,}71^0$$

Da die Skala ST verwendet wurde, läßt sich die Hypotenuse c ohne einer weiteren Einstellung ablesen:

$$\frac{4{,}1}{\sin 3{,}29^0} = \frac{c}{\sin 45^0} \qquad \begin{array}{l} T_1\ 45^0 \text{ / C } 71{,}3 \\ \text{C } 4{,}1 \text{ / ST } 3{,}29^0 \\ \text{S } 45^0 \text{ / C } 50{,}5 \end{array}$$

$c = 50{,}5$

Aus den obigen Ausführungen ergibt sich, daß für die Dreiecksauflösung mittels des Rechenstabes der FABER-CASTELL-Schul-D-Stab 52/82 bestens geeignet ist.

In vielen Fällen ist mit einer einzigen Zungeneinstellung, auch im Fall SWS, die vollständige Dreiecksauflösung möglich.

Der Vorteil der angeführten Methoden liegt auch darin, daß die zur Anwendung kommenden Lehrsätze der Trigonometrie ohne eine weitere Umformung geeignet sind und bei Verwendung des Rechenstabes nur die „Goldene Regel" gebraucht wird.

Hydraulische Berechnungen mit Hilfe der Kubikskalen (K und K') beim CASTELL-Duplex 2/82

von Baurat Dipl.-Ing. Wolfgang Wagner, Kaiserslautern

Allgemeines

In der Hydraulik sind Berechnungen mit den Potenzen $^{2/3}$ und ^{1,5} recht häufig. Durch die Kubikskalen auf der Schieberrückseite des Duplex sind hier wesentliche Vereinfachungen möglich.

Soll die Potenz $a^{2/3}$ ermittelt werden, so stellt man den Läuferstrich auf „a" in der K-Skala (Körper).

Unter dem Läuferstrich stehen dann:

auf der D-Skala $a^{1/3}$ und auf der A-Skala $(a^{1/3})^2 = a^{2/3}$

Also für $a^{2/3}$: „a" einstellen auf der K-Skala, Schieber wenden, $a^{2/3}$ ablesen auf der A-Skala.

Umgekehrt für $a^{1,5}$: „a" einstellen auf der A-Skala (x^2), umwenden, $a^{1,5}$ ablesen auf der K-Skala.

Achtung! Die K-Skala enthält 3 Dekaden, die A-Skala 2 Dekaden, es ist unbedingt darauf zu achten, daß „a" in der jeweils richtigen Dekade eingestellt wird!

B e i s p i e l : $8^{2/3} = 4$; $80^{2/3} = 18{,}55$; $800^{2/3} = 86{,}2$;
$4^{1,5} = 8$; $15{,}4^{1,5} = 60{,}5$; $40^{1,5} = 253$

1. Anwendung Fließformel von Gauckler-Manning-Strickler

$v = K_s \cdot R^{2/3} \cdot J^{1/2}$; mit $R = F/U$; und: $Q = F \cdot K_s \cdot R^{2/3} \cdot J^{1/2}$;

I. A. sind bei Berechnungen dieser Art K_s und J (Gefälle) bekannt. Meist wird J in der Form 1 : Y gegeben sein (z. B. 1 : 2340).

Wird für ein bestimmtes Q (m^3/s) die zugehörige Wassertiefe gesucht, so ist bei den meisten Profilen eine Nährungsrechnung erforderlich, deren Rechengang beträchtlich vereinfacht werden kann.

Man ermittle zunächst:

$$p = K_s \cdot J^{1/2} = \frac{K_s}{Y^{1/2}}$$

a) K_s auf D-Skala unter Läuferstrich

b) Y auf B-Skala unter Läuferstrich

c) p ablesen unter C_1 oder C_{10} auf D-Skala.

Damit wird: $V = p \cdot R^{2/3}$ (m/s) und $Q = F \cdot p \cdot R^{2/3}$ (m^3/s)

Wird nun der Bruch $R = F/U$ auf den K-Skalen eingestellt, so steht nach umwenden des Schiebers über B_1 oder B_{10} auf der A-Skala schon der Wert $(F/U)^{2/3} = R^{2/3}$;

o h n e die Zunge zu verstellen schiebt man gleich den Läuferstrich auf „p" in der B-Skala (Zunge) und liest auf der A-Skala den fertigen Wert: $v = p \cdot R^{2/3}$ ab.

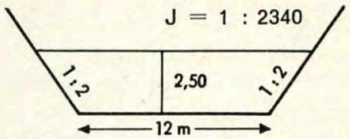
(p war gleich $K_s \cdot J^{1/2}$). Damit ist v in **einer** Rechenschieberstellung ermittelt.

Um Q zu erhalten läßt man am besten den Läufer stehen und schiebt „F" auf der BI-Skala (reziproke Quadratskala) unter den Läuferstrich.

Über B_1 oder B_{100} steht dann Q (m^3/s) = $F \cdot v$.

B e i s p i e l :

Trapezprofil: $K_s = 32$, $J = 1 : 2340$



F wird 42,5 m^2
U wird 33,18 m

Ermittlung von $p = K_s \cdot J^{1/2}$

a) Läuferstrich auf $K_s = 32$ D-Skala

b) Y = 2 340 auf B-Skala unter Läufer

c) ablesen auf D-Skala unter C_{10}

$$\mathbf{p = 0{,}662}$$

Berechnung der **Geschwindigkeit** v und der **Wassermenge Q**

1. Läuferstrich auf F = 42,5 der K-Skala des Körpers
2. U = 33,18 auf K' unter den Läuferstrich
3. Schieber umdrehen und Läuferstrich auf 0,662 in der B-Skala ablesen auf der A-Skala:
$$\mathbf{v = 0{,}78\ m/s}$$
4. F = 42,5 auf der BI-Skala unter den Läuferstrich, ablesen über B_1 auf der A-Skala:
$$\mathbf{Q = 33{,}2\ m^3/s}$$

Hinweis zur Berechnung der Fläche F eines Trapezprofiles

Es ist $F = (b + mt)t$; nach Umformen wird $\mathbf{F = (b/t + m) \cdot t^2}$

Da „m" meist eine glatte Zahl ist, läßt sich die Addition $b/t + m$ leichter im Kopf ausführen als $b + mt$.

Man dividiert b/t mithilfe der A- und B-Skalen und schiebt dann die Zunge um „m" Einheiten auf der A-Skala weiter; wird der Läuferstrich auf t der C-Skala eingestellt, so steht auf der A-Skala: $((b/t) + m) \cdot t^2 = F$

In unserem Beispiel:

b = 12 m
m = 2
t = 2,50 m

1. Läuferstrich auf b = 12 der A-Skala
2. t = 2,5 unter Läuferstrich auf B-Skala
3. ablesen über B_1 auf A-Skala 12/2,5 = 4,8
4. Zunge mit B_1 unter 4,8 + 2 = 6,8 auf der A-Skala
5. Läuferstrich auf t = 2,50 der C-Skala ablesen auf A-Skala:
$$F = 42{,}5\ m^2$$

2) Anwendung Berechnung der Grenztiefe t_{gr} und der Mindestenergiehöhe H_{min}

Bei Fließwechsel (Übergang vom strömenden zum schießenden Fließzustand) stellt sich im Rechteckprofil $t_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 \cdot g}}$ bei $H_{min} = 1{,}5 \cdot t_{gr}$ ein.

Diese Werte müssen ziemlich häufig ermittelt werden, insbesondere bei der Verwendung von dimensionslosen Größen in der Wehrberechnung spielen sie als Bezugsgrößen eine wesentliche Rolle.

Man kann $t_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 \cdot g}}$ umformen zu $\left(\frac{Q}{B}\right)^{2/3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{9{,}81}}$

also: $\underline{t_{gr} = \frac{(Q/B)^{2/3}}{2{,}14}}$

und $\underline{H_{min}} = 1{,}5\ t_{gr} = \frac{1{,}5\ (Q/B)^{2/3}}{2{,}14} = \underline{\frac{(Q/B)^{2/3}}{1{,}426}}$

Die sonst — schon wegen der oft großen Zahlen für Q — unübersichtliche Rechnung, wird damit auf eine Schieberstellung reduziert.
(Q/B) wird auf den K-Skalen dividiert.
Nach Umdrehen des Stabes steht auf der A-Skala über B_1 oder B_{100} der Wert $(Q/B)^{2/3}$; die Division durch 2,14 wird durch Einstellen des Läuferstriches über 2,14 der BI-Skala durchgeführt.
Ablesen von t_{gr} dann auf der A-Skala.
Um H_{min} zu erhalten wird der Läuferstrich auf 1,426 der BI-Skala weitergeschoben und wieder auf der A-Skala abgelesen.

Beispiel

Q = 100 m³/s — 1) Läuferstrich auf Q = 100 K-Skala (Körper)

B = 49 m — 2) B = 49 auf K' unter den Läuferstrich

3) Schieber umwenden und Läuferstrich auf 2,14 der BI-Skala ablesen: auf A-Skala $\underline{t_{gr} = 0{,}752\ \text{m}}$

4) Läuferstrich weiter auf 1,426 der BI-Skala ablesen: auf A-Skala $H_{min} = 1{,}13$ m

Beispiel

Q = 250 m³/s — 1) Läuferstrich auf Q = 250 in der K-Skala

B = 30 m — 2) B = 30 unter den Läuferstrich auf der K'-Skala

3) Schieber umwenden und Läuferstrich auf 2,14 BI ... geht nicht, also Läuferstrich auf 21,4 BI (und bei der Ablesung Komma um eine Stelle nach links)

ablesen auf der A-Skala: $\underline{t_{gr}} = \frac{19{,}2}{10} = \underline{1{,}92\ \text{m}}$

4) Läuferstrich (wie vor) auf 1,426 BI (bzw. 14,26) ablesen auf der A-Skala $H_{min} = 2{,}88$ m

Das Rechnen mit komplexen Zahlen am Rechenstab

(Fortsetzung der Abhandlung aus den Rechenstabbriefen Nr. 3, 4 und 5)

von Ing. H. Bachmann

Der Hyperbeltangens einer komplexen Zahl

$$\tanh(x + jy) = \frac{\sinh(x + jy)}{\cosh(x + jy)} = \frac{\sinh x \cdot \cos y + j \cosh x \cdot \sin y}{\cosh x \cdot \cos y + j \sinh x \cdot \sin y}$$

Zähler und Nenner mit $\cosh x \cdot \cos y - j \sinh x \cdot \sin y$ multipliziert:

$$\tanh(x + jy) = \frac{\sinh x \cdot \cosh x + j \sin y \cdot \cos y}{\cosh^2 x \cdot \cos^2 y + \sinh^2 x \cdot \sin^2 y}$$

Setzt man: $\sinh x \cdot \cosh x = \frac{\sinh 2x}{2}$; $\sin y \cdot \cos y = \frac{\sin 2y}{2}$

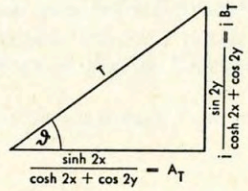
$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x}{2} + \frac{1}{2}; \quad \cos^2 y = \frac{\cos 2y}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x}{2} - \frac{1}{2}; \quad \sin^2 y = -\frac{\cos 2y}{2} + \frac{1}{2}$$

so erhält man:

$$\tanh(x + jy) = \frac{\sinh 2x + j \sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y} = \underline{\frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cos 2y} + j \frac{\sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}}$$

$$= A_T + j B_T = T\,\underline{/\vartheta}$$



$$\tan \vartheta = \frac{B_T}{A_T} = \frac{\sin 2y}{\sinh 2x}$$

und mit $\underline{T/\vartheta} = \frac{S\underline{/\zeta}}{C\underline{/\Gamma}} = \frac{S}{C}\underline{/\zeta - \Gamma}$ erhält man:

$$T = \frac{S}{C} = \frac{\sqrt{\frac{\cosh 2x - \cos 2y}{2}}}{\sqrt{\frac{\cosh 2x + \cos 2y}{2}}} = \underline{\sqrt{\frac{\cosh 2x - \cos 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}}}$$

Beispiele:

$$\tanh(-0{,}64 + j\,0{,}22) = \tanh(-40{,}7^g + j\,14^g)$$

$$= \frac{-\sinh 40{,}7^g \cdot \cos 14^g + j \cosh 40{,}7^g \cdot \sin 14^g}{\cosh 40{,}7^g \cdot \cos 14^g - j \sinh 40{,}7^g \cdot \sin 14^g}$$

$$= \frac{-0{,}666 + j\,0{,}264}{1{,}18 - j\,0{,}149} = \frac{0{,}717\,\underline{/176^g}}{1{,}19\,\underline{/-8^g}} = 0{,}603\,\underline{/184^g}$$

$\sinh 40{,}7^g$ / Y 1 // $\sin (100-14)^g$ / y 0,666 // $\sin 14^g$ / y 0,149

$\cosh 40{,}7^g$ / Y 0,1 // $\sin 14^g$ / y 0,264 // $\sin (100-14)^g$ / y 1,18

y 0,1 / Y 0,264 // $\frac{1}{y}$ 0,666 / $\tan 24^g$ // $\sin 24^g$ / $\frac{1}{y}$ 0,717

y 0,1 / Y 0,149 // $\frac{1}{y}$ 1,18 / $\tan 8^g$ // $\sin 8^g$ / $\frac{1}{y}$ 1,19

oder: $\underline{\tanh(-40{,}7^g + j\,14^g)} = \frac{-\sinh 2x}{\cosh 2x + \cos 2y} + j \frac{\sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$

$\cosh 81{,}4^g$ // y 1,93; $\sin (100-28)^g$ // Y 0,905; 1,93 + 0,905 = 2,835

$\sinh 81{,}4^g$ / Y 1 // Läufer auf y 2,835; Schiebergrundstellung // $\frac{1}{y}$ 0,584 = A_T

$\sin 28^g$ / y 2,835 // y 0,1 / Y 0,1505 = B_T

$\tanh(-40{,}7^{g} + j\,14^{g}) = -0{,}584 + j\,0{,}1505 = 0{,}603\,\underline{/184^{g}}$

y 0,1 / Y 0,1505 // $\frac{1}{y}$ 0,584 / tan 16^{g} // sin 16^{g} / $\frac{1}{y}$ 0,603

oder: $\tanh(-40{,}7^{g} + j\,14^{g}) = T\,\underline{/\vartheta}$

$$T = \sqrt{\frac{\cosh 81{,}4^{g} - \cos 28^{g}}{\cosh 81{,}4^{g} + \cos 28^{g}}};\quad \begin{matrix}\cosh 81{,}4^{g} \ /\ Y\ 1{,}93\\ \sin(100-28)^{g}\ /\ Y\ 0{,}905\end{matrix}$$

$1{,}93 + 0{,}905 = 2{,}835;\ 1{,}93 - 0{,}905 = 1{,}025$

$\sqrt{\frac{1{,}025}{2{,}835}} = 0{,}603$; Y^2 1,025 / y^2 2,835 // y 1 / Y 0,603

$$\tan\vartheta = \frac{\sin 28^{g}}{\sinh 81{,}4^{g}} = -0{,}257;\ \sphericalangle\,\vartheta = (200^{g} - 16^{g}) = 184^{g}$$

Bei umgewendetem Schieber: sin 28^{g} / sinh $81{,}4^{g}$ // cosh 0 / tan 16^{g}

$\tanh(-40{,}7^{g} + j\,14^{g}) = 0{,}603\,\underline{/184^{g}}$

$\underline{\tanh(-0{,}54 - j\,0{,}44)} = \tanh(-34{,}4^{g} - j\,28^{g}) = A_T + j\,B_T$

$$= \frac{-\sinh 68{,}8^{g}}{\cosh 68{,}8^{g} + \cos 56^{g}} + j\,\frac{-\sin 56^{g}}{\cosh 68{,}8^{g} + \cos 56^{g}}$$

cosh $68{,}8^{g}$ // y 1,64; sin $(100-56)^{g}$ // Y 0,637; $1{,}64 + 0{,}637 = 2{,}277$

sinh $68{,}8^{g}$ / Y 1 // Läufer auf y 2,277; Schiebergrundstellung // $\frac{1}{y}$ $0{,}572 = A_T$

sin 56^{g} / y 2,277 // y 0,1 / Y $0{,}339 = B_T$

$\tanh(-34{,}4^{g} - j\,28^{g}) = -0{,}572 - j\,0{,}339 = 0{,}665\,\underline{/-166^{g}}$

Das Argument des komplexen Hyperbeltangens

$\mathrm{ar}\tanh(T\,\underline{/\vartheta}) = x + j\,y$

Es gilt: $T = \sqrt{\frac{\cosh 2x - \cos 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}}$ und $\frac{A_T}{T} = \cos\vartheta$

$$T^2 + 1 = \frac{\cosh 2x - \cos 2y}{\cosh 2x + \cos 2y} + 1 = \frac{2\cosh 2x}{\cosh 2x + \cos 2y} \text{ und}$$

$$\frac{T^2 + 1}{2} = \frac{\cosh 2x}{\cosh 2x + \cos 2y}$$

Mit $A_T = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cos 2y}$ bzw. $A_T(\cosh 2x + \cos 2y) = \sinh 2x$

und $\frac{\sinh 2x}{\cosh 2x} = \tanh 2x$ wird: $\tanh 2x = \frac{A_T(\cosh 2x + \cos 2y)}{\cosh 2x} = \frac{2\,A_T}{T^2 + 1}$

Setzt man für $A_T = T\cos\vartheta$ ein, so erhält man: $\underline{\tanh 2x = \frac{2\,T\cos\vartheta}{1 + T^2}}$

Mit $1 - T^2 = \frac{2\cos 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$ und $\frac{B_T}{T} = \sin\vartheta$ erhält man in ähnlicher Weise:

$$\tan 2y = \frac{2\,T\sin\vartheta}{1 - T^2}$$

Beispiele:

$\underline{\mathrm{ar}\tanh(0{,}603\,/184^{g})}$; $T = 0{,}603$; $T^2 = 0{,}364$

$1 + T^2 = 1{,}364$; $1 - T^2 = 0{,}636$

$$\tanh 2x = \frac{2\cdot 0{,}603\cdot\cos 16^{g}}{1{,}364} = 0{,}855;\ 2x = 81{,}4^{g};\ x = 40{,}7^{g}$$

y 1,364 / sin $(100-16)^{g}$ // y 1,206 / Y 0,855; y 0,855 // tanh $81{,}4^{g}$;

$$\tan 2y = \frac{2\cdot 0{,}603\cdot\sin 16^{g}}{0{,}636} = 0{,}471;\ 2y = 28^{g};\ y = 14^{g}$$

y 0,636 / sin 16^{g} // y 1,206 / tan 28^{g};

Die Vorzeichen werden nach Tabelle (Brief Nr. 7) bestimmt.
(II. Quadrant; für x negativ und für y positiv)

$\mathrm{ar}\tanh(0{,}603\,\underline{/184^{g}}) = -40{,}7^{g} + j\,14^{g}$

$\underline{\mathrm{ar}\tanh(0{,}665\,/-166^{g})}$; $T = 0{,}665$; $T^2 = 0{,}442$

$1 + T^2 = 1{,}442$; $1 - T^2 = 0{,}558$

$$\tan 2x = \frac{2\cdot 0{,}665\cdot\cos 34^{g}}{1{,}442} = 0{,}794;\ 2x = 68{,}8^{g};\ x = 34{,}4^{g}$$

y 1,442 / sin $(100-34)^{g}$ // y 1,33 / Y 0,794; y 0,794 // tanh $68{,}8^{g}$

$$\tan 2y = \frac{2\cdot 0{,}665\cdot\sin 34^{g}}{0{,}558} = 1{,}212;\ 2y = 56^{g};\ y = 28^{g}$$

y 0,558 / sin 34^{g} // y 1,33 / tan 56^{g}

Unter Berücksichtigung der Vorzeichen aus Tabelle (Rechenstab-Brief Nr. 7) wird somit:

$\mathrm{ar}\tanh(0{,}665\,\underline{/-166^{g}}) = -34{,}4^{g} - j\cdot 28^{g}$

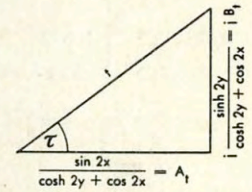
Der Tangens einer komplexen Zahl

Es gilt: $\tanh j\,u = j\tan u$; $\tan u = \frac{\tanh j\,u}{j}$

und damit: $\tan(x + jy) = \frac{\tanh(-y + j\,x)}{j} = \frac{-\sinh 2y + j\sin 2x}{j(\cosh 2y + \cos 2x)}$

$$\tan(x + j\,y) = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y + \cos 2x} + j\,\frac{\sinh 2y}{\cosh 2y + \cos 2x}$$

$$= A_t + j\,B_t = t\,\underline{/\tau}$$



$$\tan\tau = \frac{B_t}{A_t} = \frac{\sinh 2y}{\sin 2x}$$

und mit $t = \frac{S}{C} = \frac{\sqrt{\frac{\cosh 2y - \cos 2x}{2}}}{\sqrt{\frac{\cos 2x + \cosh 2y}{2}}}$ wird $t = \sqrt{\frac{\cosh 2y - \cos 2x}{\cosh 2y + \cos 2x}}$

B e i s p i e l e :

$\underline{\tan(0{,}36 + j\,0{,}6)} = \tan(22{,}9^g + j\,38{,}2^g)$

$$= \frac{\sin 45{,}8^g}{\cosh 76{,}4^g + \cos 45{,}8^g} + j\,\frac{\sinh 76{,}4^g}{\cosh 76{,}4^g + \cos 45{,}8^g}$$

cosh $76{,}4^g$ // y 1,81; sin $(100-45{,}8)^g$ // Y 0,752; 1,81 + 0,752 = 2,562

sin $45{,}8^g$ / y 2,562 // y 0,1 / Y 0,258 = A_t

sinh $76{,}4^g$ / Y 1 // Läufer auf y 2,562; Schiebergrundstellung // $\frac{1}{y}$ 0,588 = B_t

$\tan(0{,}36 + j\,0{,}6) = 0{,}258 + j\,0{,}588 = 0{,}643\,\underline{/73{,}7^g}$

$\underline{\tan(-0{,}44 - j\,0{,}38)} = \tan(-28^g - j\,24{,}2^g)$

$$= \frac{-\sin 56^g}{\cosh 48{,}4^g + \cos 56^g} - j\,\frac{\sinh 48{,}4^g}{\cosh 48{,}4^g + \cos 56^g}$$

cosh $48{,}4^g$ // y 1,305; sin $(100-56)^g$ // Y 0,637; 1,305 + 0,637 = 1,942

sin 56^g / y 1,942 // y 0,1 / Y 0,347 = A_t

sinh $48{,}4^g$ / Y 1 // Läufer auf y 1,942; Schiebergrundstellung // $\frac{1}{y}$ 0,43 = B_t

$\tan(-0{,}44 - j\,0{,}38) = -0{,}397 - j\,0{,}43 = 0{,}585\,\underline{/-147{,}4^g}$

Das Argument des komplexen Tangens

$\text{arc}\tan(\underline{t/\tau}) = x + j\,y$

Es gilt: $t = \sqrt{\dfrac{\cosh 2y - \cos 2x}{\cosh 2y + \cos 2x}}$ und $\dfrac{A_t}{t} = \cos\tau$

$1 - t^2 = \dfrac{2\cos 2x}{\cosh 2y + \cos 2x}$; mit $A_t = \dfrac{\sin 2x}{\cosh 2y + \cos 2x}$ und $\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$

wird: $\tan 2x = \dfrac{A_t\,(\cosh 2y + \cos 2x)}{\cos 2x} = \underline{\dfrac{2t \cdot \cos\tau}{1 - t^2}}$

In ähnlicher Weise erhält man mit $1 + t^2 = \dfrac{2\cosh 2y}{\cosh 2y + \cos 2x}$

und $\dfrac{B_t}{t} = \sin\tau$: $\quad \underline{\tanh 2y = \dfrac{2t \cdot \sin\tau}{1 + t^2}}$

B e i s p i e l e :

$\underline{\text{arc}\tan(0{,}585\,/-147{,}4^g)}$; $t = 0{,}585$; $t^2 = 0{,}342$

$1 - t^2 = 0{,}658$; $1 + t^2 = 1{,}342$

$\tan 2x = \dfrac{2 \cdot 0{,}585 \cdot \cos 52{,}6^g}{0{,}658} = 1{,}205$; $2x = 56^g$; $x = 28^g$

y 0,658 / sin $(100-52{,}6)^g$ // y 1,17 / tan 56^g

$\tanh 2y = \dfrac{2 \cdot 0{,}585 \cdot \sin 52{,}6^g}{1{,}342} = 0{,}641$; $2y = 48{,}4^g$; $y = 24{,}2^g$

y 1,342 / sin $52{,}6^g$ // y 1,17 / Y 0,641; Y 0,641 // tanh $48{,}4^g$

Unter Berücksichtigung des Vorzeichens nach Tabelle (Rechenstab-Brief Nr. 7) wird:

$\text{arc}\tan(0{,}585\,/-147{,}4^g) = -28^g - j\,24{,}2^g = -0{,}44 - j\,0{,}38$

$\underline{\text{arc}\tan(0{,}643\,/73{,}7^g)}$; $t = 0{,}643$; $t^2 = 0{,}413$

$1 - t^2 = 0{,}587$; $1 + t^2 = 1{,}413$

$\tan 2x = \dfrac{2 \cdot 0{,}643 \cdot \cos 73{,}7^g}{0{,}587} = 0{,}877$; $2x = 45{,}8^g$; $x = 22{,}9^g$

y 0,587 / sin $(100-73{,}7)^g$ // y 1,286 / tan $45{,}8^g$

$\tanh 2y = \dfrac{2 \cdot 0{,}643 \cdot \sin 73{,}7^g}{1{,}413} = 0{,}833$; $2y = 76{,}4^g$; $y = 38{,}2^g$

y 1,413 / sin $73{,}7^g$ // y 1,286 / Y 0,833; y 0,833 // tanh $76{,}4^g$

$\text{arc}\tan(0{,}643\,\underline{/73{,}7^g}) = 22{,}9^g + j\,38{,}2^g = 0{,}36 + j\,0{,}6$

Anwendung

Berechne den Eingangswiderstand $\mathfrak{w}_1$ einer leerlaufenden Leitung, deren Länge l = 50 km, deren Wellenwiderstand $\mathfrak{z}_0 = 723\,\underline{/-12^g}$ und deren Fortpflanzungskonstante $\gamma = 0{,}03\,\underline{/80^g}$ betragen.

$$\mathfrak{w}_1 = \frac{\mathfrak{z}_0}{\tanh(\gamma \cdot l)} = \frac{723\,\underline{/-12^g}}{\tanh(50 \cdot 0{,}03\,\underline{/80^g})} = \frac{723\,\underline{/-12^g}}{\tanh(1{,}5\,\underline{/80^g})}$$

$\tanh(1{,}5\,\underline{/80^g}) = \tanh(0{,}464 + j\,1{,}43) = \tanh(29{,}6^g + j\,91^g)$

$A_T = \dfrac{\sinh 59{,}2^g}{\cosh 59{,}2^g + \cos 182^g}$; $B_T = \dfrac{\sin 182^g}{\cosh 59{,}2^g + \cos 182^g}$

cosh $59{,}2^g$ // y 1,462; $\cos 182^g = -\cos(200-182)^g = -\cos 18^g = -0{,}96$

sin $(100-18)^g$ // Y 0,96; $\cosh 59{,}2^g + \cos 182^g = 1{,}462 - 0{,}96 = 0{,}502$

$A_T = \dfrac{\sinh 59{,}2^g}{0{,}502} = 2{,}13$; $B_T = \dfrac{\sin 182^g}{0{,}502} = 0{,}557$

sinh $59{,}2^g$ / Y 1 // Läufer auf y 0,502; Schiebergrundstellung // $\frac{1}{y}$ 2,13 = A_T

sin $(200-182)^g$ / y 0,502 // y 1 / Y 0,557 = B_T

$\tanh(1{,}5\,\underline{/80^g}) = 2{,}13 + j\,0{,}557 = 2{,}2\,\underline{/16{,}3^g}$

Der komplexe Eingangswiderstand der Leitung ist somit:

$$\mathfrak{w}_1 = \frac{723\,\underline{/-12^g}}{2{,}2\,\underline{/16{,}3^g}} = 329\,\underline{/-28{,}3^g}$$